

Własności funkcji absolutnie ciągłych – zadania

Zadanie 1. Funkcja Cantora $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ma następujące własności:

- jest niemalejąca i jednostajnie ciągła,
- nie jest absolutnie ciągła,
- $\varphi' = 0$ p.w., w konsekwencji $\varphi(1) - \varphi(0) \neq \int_0^1 \varphi'$.

Zadanie 2. Wykazać, że następujące zawierania zachodzą na każdym przedziale $[a, b]$ i są właściwe:

$$AC \subsetneq C, \quad \text{Lip} \subsetneq AC \subsetneq BV.$$

Zadanie 3. Wykazać, że iloczyn funkcji absolutnie ciągłych jest również funkcją absolutnie ciągłą.

Zadanie 4. Wykazać wzór na całkowanie przez części dla funkcji absolutnie ciągłych:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx \quad \text{dla } f, g \in AC([a, b]).$$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ pochodna $f'(x)$ istnieje i $|f'(x)| \leq L$, to funkcja f jest lipszycowska ze stałą L .

Zadanie 6. Wykazać, że każda funkcja $f \in BV([a, b])$ rozkłada się w sposób jednoznaczny (z dokładnością do dodania stałej) na sumę $f = g + h$ funkcji absolutnie ciągłej g i funkcji osobliwej h .

Zadanie 7. Dla każdej z poniższych funkcji sprawdzić, czy jest ona absolutnie ciągła i czy ma skończone wahanie na $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Zadanie 8. Pokazać, że jeśli funkcja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w 0, $f \in AC([\varepsilon, 1])$ dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $f \in BV([0, 1])$, to $f \in AC([0, 1])$. Wykazać, że założenie $f \in BV([0, 1])$ jest konieczne.

Zadanie 9. Wykazać, że jeśli $f \in AC([a, b])$, to $T(f, [a, b]) = \int_a^b |f'|$.

Zadanie 10. Pokazać, że funkcje o zerowej słabej pochodnej są stałe, tj. jeśli $f \in L^1(a, b)$ oraz

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = 0 \quad \text{dla każdej funkcji } \varphi \in C_c^\infty((0, \infty)),$$

to $f \equiv \text{const}$ p.w. *Wskazówka:* rozważyć przybliżenia spłotowe f .